Serie 5

1. Beispiel: Quotient einer freien Gruppe

Betrachten Sie die freie Gruppe $\mathbb{Z}*\mathbb{Z} = \langle a, b\rangle$, d.h. die freie Gruppe erzeugt von den Elementen a und b. Weiter sei $N = \langle\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle\rangle$ der normale Abschluss von $aba^{-1}b^{-1}$ in $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, d.h. N ist die kleinste normale Untergruppe, welche $aba^{-1}b^{-1}$ enthält. Zeigen Sie, dass die Quotientengruppe

$$(\mathbb{Z}*\mathbb{Z})/N = \langle a, b\rangle/\langle\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle\rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

2. Fundamentalgruppe des punktierten 2-Torus

Wir betrachten den 2-dimensionalen Torus $T = S^1 \times S^1$ und fixieren einen Punkt $x = (x_1, x_2) \in T = S^1 \times S^1$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $\pi_1((S^1 \times S^1) \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$. Definiere dazu

$$U := (S^1 \setminus \{x_1\}) \times S^1 \subset (S^1 \times S^1) \setminus \{x\}$$

und

$$V := S^1 \times (S^1 \setminus \{x_2\}) \subset (S^1 \times S^1) \setminus \{x\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\pi_1(U) = \pi_1(V) = \mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie, dass $\pi_1(U\cap V) = \{e\}$, d.h. $U\cap V$ ist einfach zusammenhängend.

c) Folgern Sie mit Hilfe des Satzes von Van Kampen, dass $\pi_1((S^1\times S^1)\setminus\{x\}) = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

3. Fundamentalgruppe von höherdimensionalen punktierten Tori

Wir betrachten den n-dimensionalen Torus $(S^1)^n$ $(n \geq 3)$ und fixieren einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in (S^1)^n$. Wir wollen zeigen, dass

$$\pi_1((S^1)^n \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}^n. \tag{1}$$

Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Für $z \in S^1$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(z) := B(z, \varepsilon) \cap S^1 \cong (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine ε-Umgebung von z in S^1. Wir definieren

$$U := \big((S^1)^n \setminus \{x\}\big) \subset (S^1)^n$$

und

$$V := \prod_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i) \subset (S^1)^n.$$

Somit gilt $U \cup V = (S^1)^n$.

a) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(V)$.

b) Zeigen Sie, dass $U \cap V$ einfach zusammenhängend ist.

c) Folgern Sie mit Hilfe des Satzes von Van Kampen, dass

$$\pi_1\big((S^1)^n \setminus \{x\}\big) = \pi_1\big((S^1)^n\big).$$

d) Berechnen Sie $\pi_1\big((S^1)^n\big)$.